Elementos de Análise Financeira
Juros Compostos

Profa. Patricia Maria Bortolon

Juros Compostos

- Os juros formados em cada período são acrescidos ao capital formando o montante (capital mais juros) do período.
- Este montante passará a render juros no período seguinte e formando um novo montante.. e assim por diante.
- No regime de juros compostos, os juros são capitalizados, produzindo juros sobre juros periodicamente.

Fonte: Assaf Neto (2009), Matemática Financeira e Suas Aplicações, Cap. 2

Juros Compostos – Expressões

- Vamos calcular os juros e montante em cada mês de uma aplicação de $1.000 a uma taxa composta de 10% ao mês.
- Vamos adotar a nomenclatura: PV = valor presente (capital); FV = valor futuro (montante); J = juros.

Juros Compostos – Expressões

- Final do 1º. mês
  - FV = $1.000 x (1 + 0,10) = $1.100
- Final do 2º. mês
  - FV = $1.000 x (1 + 0,10) x (1 + 0,10)
  - FV = $1.000 x $(1 + 0,10)^2$ = $1.210
- Final do 3º. mês
  - FV = $1.000 x (1 + 0,10) x (1 + 0,10) x (1 + 0,10)
  - FV = $1.000 x $(1 + 0,10)^3$ = $1.331
- Final do enésimo mês
  - FV = $1.000 x (1 + 0,10) x (1 + 0,10) x (1 + 0,10) x ... x (1 + 0,10)
  - FV = $1.000 x $(1 + 0,10)^n$

Juros Compostos – Expressões

- Final do enésimo mês
  - FV = \$1.000 x (1 + 0,10) x (1 + 0,10) x (1 + 0,10) x ... x (1 + 0,10)
  - FV = \$1.000 x $(1 + 0{,}10)^n$
- Generalizando-se:

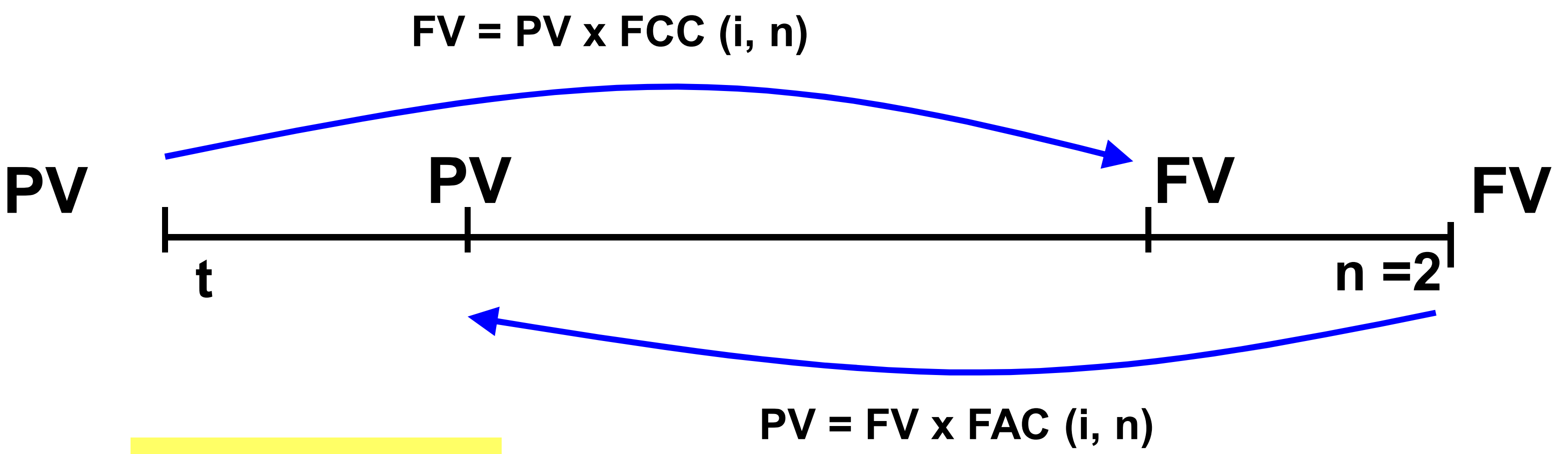
$$FV = PV\,(1 + i)^n$$

FCC (i, n) = fator de capitalização (ou de valor futuro)

$$PV = 1 \cdot \frac{FV}{(1+i)^n}$$

FAC (i, n) = fator de atualização (ou de valor presente)

Juros Compostos – Expressões



$J = FV - PV$

Como:

$FV = PV\,(1 + i)^n$

Colocando-se PV em evidência:

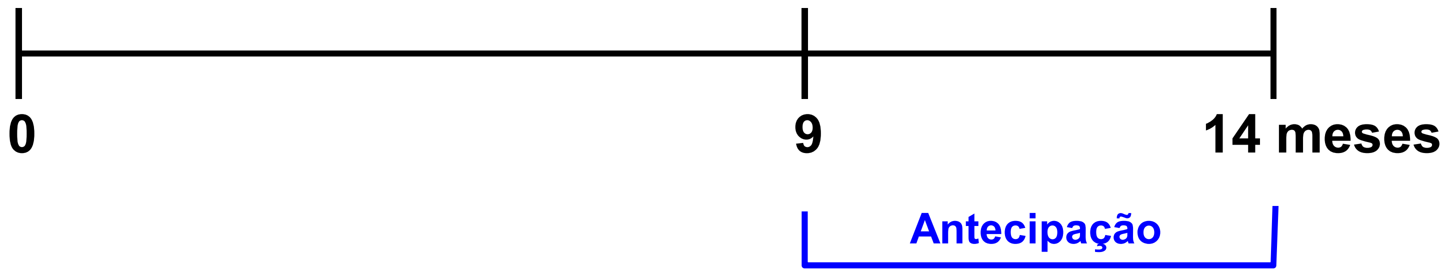
$J = PV \times [(1 + i)^n - 1]$

Exercícios

1. Qual o valor de resgate de uma aplicação de \$12.000 em um título pelo prazo de 8 meses à taxa de juros composta de 3,5%am?
2. Se uma pessoa deseja obter \$30.000 dentro de um ano, quanto deverá ela depositar numa caderneta de poupança que rende 1% de juros compostos ao mês?
3. Determinar a taxa mensal composta de juros de uma aplicação de \$40.000 que produz um montante de \$43.894,63 ao final de um quadrimestre.
4. Uma aplicação de \$22.000 efetuada em certa data produz, à taxa composta de juros de 2,4% ao mês, um montante de \$26.596,40 em certa data futura. Calcular o prazo da operação.
5. Determinar o juro pago de um empréstimo de \$88.000 pelo prazo de 5 meses à taxa composta de 4,5%am.

Extensões do conceito de Valor Presente

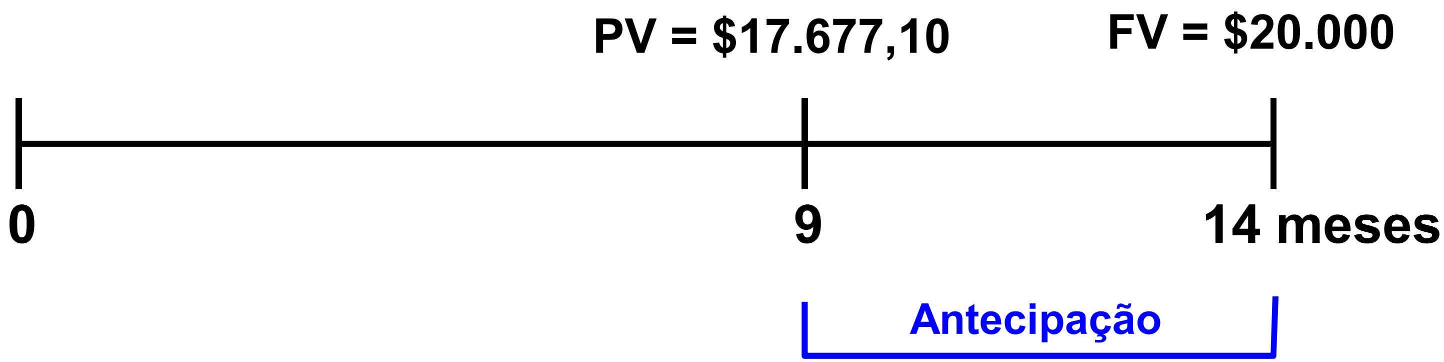
- Valor Presente não se refere necessariamente a um valor expresso no momento zero!!
- O Valor Presente pode ser apurado em qualquer data focal anterior à data do valor futuro (montante).
- Exemplo: quanto será pago por um empréstimo de $20.000 vencível daqui a 14 meses caso se deseje antecipar seu pagamento por 5 meses? Imagine que o credor está disposto a atualizar a dívida pela taxa de 2,5% am.



Extensões do conceito de Valor Presente

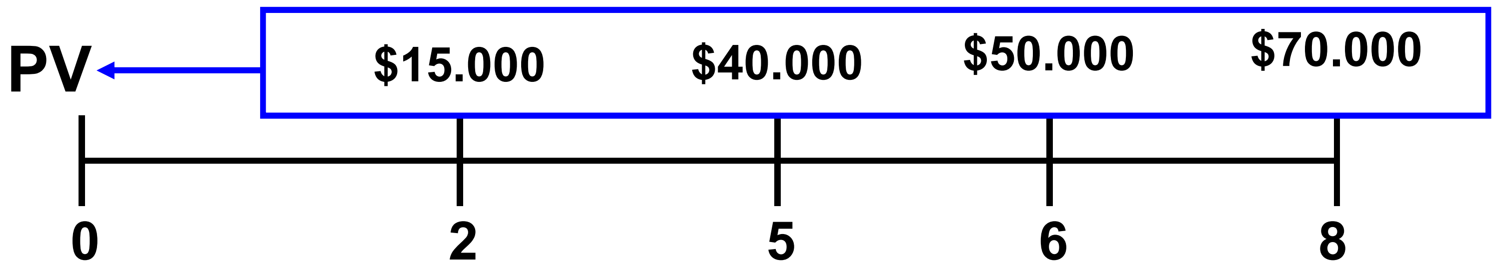
- Exemplo: quanto será pago por um empréstimo de \$20.000 vencível daqui a 14 meses caso se deseje antecipar seu pagamento por 5 meses? Imagine que o credor está disposto a atualizar a dívida pela taxa de 2,5% am.

$$PV = \frac{20.000}{(1+0{,}025)^5} = \frac{20.000}{(1{,}025)^5} = \$17.677{,}10$$



Extensões do conceito de Valor Presente

- O conceito do Valor Presente pode ser aplicado a diversos valores, capitalizando-os ou atualizando-os para qualquer data no tempo.
- Exemplo: qual o valor presente (na data zero) de um empréstimo que envolve os seguintes pagamentos $15.000 daqui a 2 meses (a contar de hoje); $40.000 daqui a 5 meses; $50.000 daqui a 6 meses e $70.000 de hoje a 8 meses. Taxa de juros de 3% am



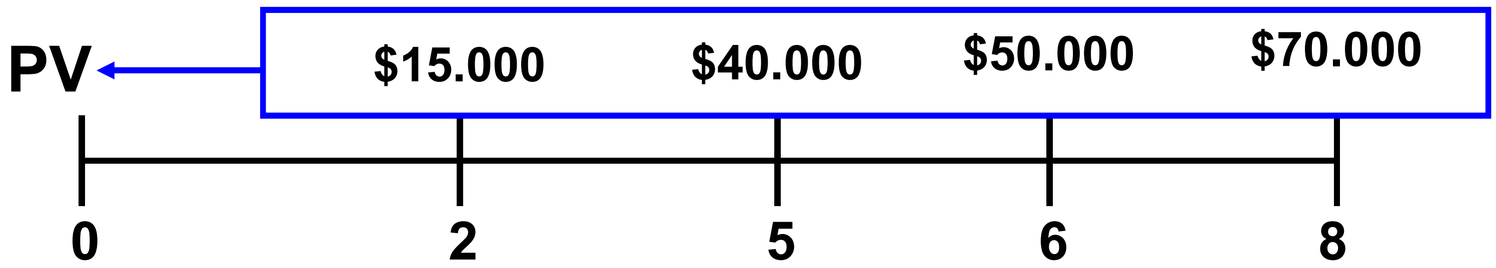
Extensões do conceito de Valor Presente

- Utilizando-se a expressão de valor presente:

$$PV = \frac{15.000}{(1,03)^2} + \frac{40.000}{(1,03)^5} + \frac{50.000}{(1,03)^6} + \frac{70.000}{(1,03)^8}$$

$$PV = 14.138,04 + 34.504,35 + 41.874,21 + 55.258,65$$

$$PV = 145.776,15$$



Taxas Equivalentes

- Em Juros Simples comentamos que a taxa equivalente é a própria taxa proporcional da operação.
- São equivalentes porque produzem o mesmo montante de um mesmo capital ao final de certo período de tempo.
- Exemplo: em juros simples um capital de $80.000 produz o mesmo montante em qualquer data se capitalizado a 3%am e 9%at.

n = 3 meses

- **FV (3% am) = 80.000 (1 + 0,03 x 3) = 87.200**
- **FV (9% at) = 80.000 (1 + 0,09 x 1) = 87.200**

n = 12 meses

- **FV (3% am) = 80.000 (1 + 0,03 x 12) = 108.800**
- **FV (9% at) = 80.000 (1 + 0,09 x 4) = 108.800**

Taxas Equivalentes

- E em juros compostos?

n = 3 meses

$$\begin{cases} FV\ (3\%\ am) = 80.000\,(1 + 0{,}03)^3 = 87.418{,}16 \\ FV\ (9\%\ at) = 80.000\,(1 + 0{,}09) = 87.200{,}00 \end{cases}$$

n = 12 meses

$$\begin{cases} FV\ (3\%\ am) = 80.000\,(1 + 0{,}03)^{12} = 114.060{,}87 \\ FV\ (9\%\ at) = 80.000\,(1 + 0{,}09)^4 = 112.926{,}53 \end{cases}$$

1. No primeiro caso, que taxa mensal é equivalente a taxa de 9% at pelo critério de juros compostos?
2. Ainda no primeiro caso que taxa trimestral é equivalente à taxa mensal de 3% am?
3. Utilize a taxa trimestral que você encontrou no item 2 para calcular o montante após 12 meses no segundo caso acima. Esta é a taxa equivalente ao trimestre também neste caso?

Taxas Equivalentes

- O conceito de taxa equivalente permanece válido para o regime de juros compostos, o cálculo entretanto é diferente.
- Para que produzam o mesmo montante no futuro duas taxas, expressas em períodos diferentes, devem produzir o mesmo ***fator de capitalização***.
- O desenvolvimento da expressão é:

$$(1+i_q)^q = (1+i)$$

$$(1+i_q) = \sqrt[q]{1+i}$$

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$$

Onde:
q = nº. de períodos de capitalização

Taxas Equivalentes

- A expressão da taxa equivalente composta é então dada pela expressão:

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$$

- Por exemplo, a taxa equivalente composta mensal de 10,3826% ao semestre é de 1,66%, ou seja:

$$i_6 = \sqrt[6]{1+0{,}103826} - 1$$

$$i_6 = \sqrt[6]{1{,}103826} - 1 = 1{,}0166 \text{ ou } 1{,}66\% \text{ a.m.}$$

Taxas Equivalentes

- Para ilustrar como as taxas são equivalentes, calcule o montante de um capital de $100.000 aplicados por dois anos usando as taxas mensal e semestral calculadas anteriormente.
- Um banco divulga que a rentabilidade de uma aplicação é de 12% ao semestre (ou 2% ao mês), uma vez que um capital de $10.000 aplicado produz ao final de 6 meses, o montante de $11.200. Você concorda com a afirmação sobre a rentabilidade mensal?

Exercícios

6. Quais as taxas de juros compostos mensal e trimestral equivalentes a 25% ao ano?
7. Explicar a melhor opção: aplicar um capital de $60.000 à taxa de juros compostos de 9,9% ao semestre ou à taxa de 20,78% ao ano.
8. Demonstrar se a taxa de juros de 11,8387% ao trimestre é equivalente à taxa de 20,4999% para cinco meses. Calcular também a equivalente mensal composta dessas taxas.

Taxa Efetiva

- A ***taxa efetiva*** de juros é a taxa dos juros apurada durante todo o período ***n***, sendo formada exponencialmente através dos períodos de capitalização.

$$\textbf{Taxa Efetiva } (i_f) = (1 + i)^q - 1$$

- Por exemplo, uma taxa de 3,8% ao mês determina um montante efetivo de juros de 56,45% ao ano, ou seja:

$$i_f = (1 + 0{,}038)^{12} - 1 = 56{,}44\% \text{ ao ano}$$

Taxa Nominal

- ***Taxa de juros nominal*** é assim denominada quando o prazo de capitalização dos juros (ou seja, período de formação e incorporação dos juros ao principal) não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros.
- Por exemplo: uma taxa de juros de 36% ao ano que é capitalizada mensalmente é uma taxa nominal, pois o prazo da taxa é **ao ano** e a capitalização é **mensal**, ou seja, os prazos não são coincidentes.

Taxa Nominal

- Quando a taxa é nominal é comum considerar que a capitalização ocorre por juros proporcionais simples.
- No exemplo anterior, 36% ao ano será capitalizada mensalmente através de uma taxa de 36%/12 = 3% ao mês (taxa proporcional ou linear).
- Entretanto, ao se capitalizar esta taxa mensal de juros pelo regime de juros compostos qual a taxa efetiva ao final de um ano?

Taxa Nominal

- Taxa nominal da operação para o período = 36% ao ano
- Taxa proporcional simples

(taxa definida para o período de capitalização) = 3% ao mês

- Taxa efetiva de juros:

$$i_f = \left(1 + \frac{0{,}36}{12}\right)^{12} - 1 = 42{,}6\% \text{ ao ano}$$

- A taxa nominal não revela a efetiva taxa de juros de um operação.
- Para que 36% ao ano fosse considerada a taxa efetiva, a formação mensal dos juros deveria ser feita a partir da taxa equivalente composta, ou seja:

Taxa Nominal

- Para que 36% ao ano fosse considerada a taxa efetiva, a formação mensal dos juros deveria ser feita a partir da taxa equivalente composta, ou seja:

Taxa Equivalente Mensal de 36% a.a.

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$$

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+0{,}36} - 1 = \sqrt[12]{1{,}36} - 1 = 2{,}6\% a.m.$$

- Ao se capitalizar mensalmente esta taxa de juros equivalente mensal, chega-se, obviamente, aos 36% ao ano.

Taxa Efetiva Anual

$$i_f = (1+0{,}026)^{12} - 1$$

$$i_f = (1{,}026)^{12} - 1 = 36\% a.a.$$

Exercícios

9. Um empréstimo no valor de $11.000 é efetuado pelo prazo de um ano à taxa nominal (linear) de juros de 32% ao ano, capitalizados trimestralmente. Pede-se determinar o montante e o custo efetivo do empréstimo.
10. A Caderneta de Poupança paga juros anuais de 6% com capitalização mensal à base de 0,5%. Calcular a rentabilidade efetiva desta aplicação financeira.
11. Sendo de 24%aa a taxa nominal de juros cobrada por uma instituição, calcular o custo efetivo anual, admitindo que o período de capitalização dos juros seja:
    a) Mensal;
    b) Trimestral;
    c) Semestral.
12. Uma aplicação financeira promete pagar 42% ao ano de juros. Sendo de um mês o prazo da aplicação, pede-se determinar a sua rentabilidade efetiva considernado os juros de 42% aa como:
    a) Taxa Efetiva;
    b) Taxa Nominal.

Conversão de Taxa Efetiva em Nominal

- No mercado, algumas taxas podem ser definidas tanto por taxa efetiva como por taxa nominal (linear), ex.: cheque especial
- Como comparar as seguintes taxas oferecidas por dois bancos?
  - Banco A: taxa efetiva de 4,2% am
  - Banco B: taxa nominal de somente 4,12% am (30 dias corridos)
  - Os juros das operações são calculados diariamente sobre o saldo devedor em conta corrente.

Conversão de Taxa Efetiva em Nominal

- Convertendo a taxa efetiva do Banco A em taxa nominal:
  - Taxa efetiva: 4,2% am
  - Conversão em taxa nominal:

$$\sqrt[30]{1+0{,}042}-1=0{,}137234\%\ \text{ ao dia x } 30:4{,}12\%\ \text{am}$$

- Convertendo a taxa nominal do Banco B em taxa efetiva:
  - Taxa nominal: 4,12% am
  - Conversão em taxa efetiva:

$$\frac{4{,}12\%}{30}=0{,}137333\%\ \text{ao dia}$$

$$(1+0{,}00137333)^{30}-1=4{,}2\%\ \text{am}$$

Taxa Efetiva e Número de Períodos de Capitalização

- À medida que o número de períodos de capitalização de uma taxa nominal de juros aumenta, a taxa efetiva também se eleva.
- Quanto maior a frequência de capitalização de uma mesma taxa nominal, mais alto é o rendimento acumulado.
- Para uma taxa nominal de 18% aa calcule a taxa efetiva anual para os diferentes períodos de capitalização.

Período de Capitalização	Número de Períodos	Taxa Efetiva Anual
Anual	1	
Semestral	2	
Quadrimestral	3	
Trimestral	4	
Mensal	12	
Diário	360	

Taxa Efetiva e Número de Períodos de Capitalização

- À medida que o número de períodos de capitalização de uma taxa nominal de juros aumenta, a taxa efetiva também se eleva.
- Quanto maior a frequência de capitalização de uma mesma taxa nominal, mais alto é o rendimento acumulado.
- Para uma taxa nominal de 18% aa calcule a taxa efetiva anual para os diferentes períodos de capitalização.

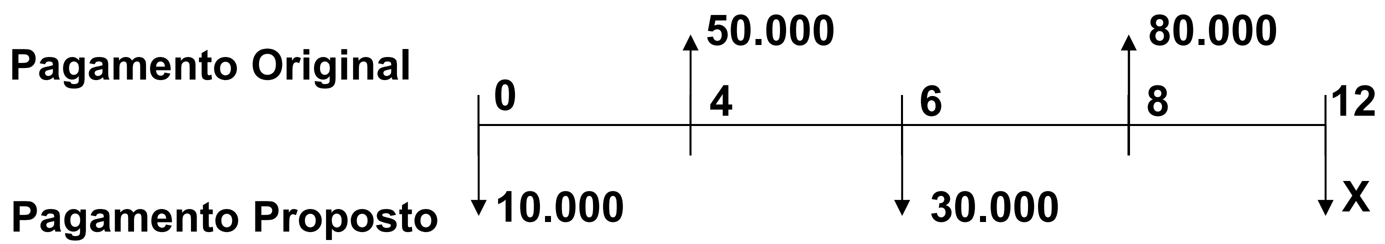
Período de Capitalização	Número de Períodos	Taxa Efetiva Anual
Anual	1	18,0%
Semestral	2	18,81%
Quadrimestral	3	19,10%
Trimestral	4	19,25%
Mensal	12	19,56%
Diário	360	19,72%

Equivalência Financeira em Juros Compostos

- Equivalência Financeira: quando dois ou mais capitais produzem o mesmo resultado se expressos em certa data comum de comparação a uma mesma taxa de juros.
- No regime de juros simples essa equivalência não ocorria para qualquer data focal.
- Em juros compostos sim!
- Em juros compostos a equivalência independe da data de comparação escolhida.

Equivalência Financeira em Juros Compostos Exercícios

13. Calcule o valor X que torna os fluxos de pagamento original e proposto equivalentes. Faça os cálculos considerando a data focal em 0 e em 12 e taxa de juros de 2% am.



14. Você deve $5.000 a um banco sendo o vencimento daqui a 3 meses. Sabendo que não terá condições de honrar o pagamento você elabora uma proposta de troca dos pagamentos por outro que seja em duas parcelas, uma daqui a 8 meses e outra de igual valor daqui a 9 meses. A taxa de juros é de 5%am. Calculo o valor a ser proposto para pagamento nas duas parcelas. Faça o cálculo considerando datas focais hoje, daqui a 3 meses e daqui a 8 meses.

Rentabilidade e Valor Presente

- Um investidor detém um título com valor nominal (resgate) de $407.164,90 daqui a 4 meses. Ele avalia a troca por outro com valor nominal de $480.000 daqui a 8 meses. Sabendo-se que este investidore exige um retorno mínimo de 5% em seus investimentos, você o aconselharia a fazer a troca?
- Há duas formas de analisar a questão: observando a ***rentabilidade*** ou o ***valor presente*** da proposta!!

Rentabilidade e Valor Presente

$$PV = \$407.164{,}90$$
$$FV = \$480.000{,}00$$
$$n = 4 \text{ meses}$$

- Rentabilidade:
  - Calcula-se a rentabilidade da proposta e compara-se com a mínima exigida pelo investidor

$$FV = PV(1+i)^n$$
$$480.000{,}00 = 407.164{,}90(1+i)^4$$
$$\frac{480.000{,}00}{407.164{,}90} = (1+i)^4$$
$$1{,}178884 = (1+i)^4$$
$$\sqrt[4]{1{,}178884} = \sqrt[4]{(1+i)^4}$$
$$1{,}042 = 1+i$$
$$i = 0{,}042 \text{ ou } 4{,}2\% \text{ am}$$

- Valor Presente
  - Compara-se os valores em uma mesma data. Para isso pode-se calcular o valor presente na data do vencimento do primeiro título e verificando se é maior ou menor.

$$PV = \frac{480.000{,}00}{(1{,}05)^4} = \$394.897.20$$

Períodos Não Inteiros

- Há duas formas de tratamento de períodos não inteiros:
  - ***Convenção Linear:*** a parte inteira do prazo é tratada como juros compostos e a parte fracionária como juros simples.

$$FV = PV(1+i)^n \times \left(1 + i \times \frac{m}{k}\right)$$

$$m/k = \text{parte fracionária do prazo}$$

  - ***Convenção Exponencial:*** adota o regime composto tanto para a parte inteira como para a fracionária.

$$FV = PV(1+i)^{n+m/k}$$

Exercício

15. Um capital de $100.000 emprestado à taxa de 18% ao ano pelo prazo de 4 anos e 9 meses produzirá que montante? Calcule o valor pela convenção linear e pela convenção exponencial.
16. No exercício anterior calcule a taxa equivalente mensal e calcule o montante a partir dela.

Capitalização Contínua

- Até aqui as taxas de juros ocorrem ao final de cada período (dia, mês, trimestre etc..), de forma finita e discreta.
- Entretanto, há uma forma de capitalização em que os juros ocorrem a cada instante infinitesimal, conhecido por capitalização contínua.

$$FV = PV \times e^{In}$$

  - *e* = número constante, base dos logaritmos neperianos (*e* = 2,7182818284...)
  - I = taxa de juro periódica, conhecida como ***taxa instantânea***

Capitalização Contínua - Exemplo

$$FV = PV \times e^{In}$$

- Admita uma aplicação de $1.000 por dois anos, à taxa de 10% com capitalização contínua. Qual o montante apurado ao final desse período com capitalização contínua e nas condições de capitalização discreta de juros compostos?
  - ***Capitalização Contínua***
    - **FV = PV x e^{In}**
    - **FV = $1.000 x $2{,}7182^{0,10x2}$**
    - **FV = $1.000 x $2{,}7182^{0,10x2}$**
    - **FV = $1.221,40**
  - ***Juros Compostos (capitalização discreta)***
    - **FV = PV x $(1+i)^n$**
    - **FV = $1.000 x $1{,}10^2$**
    - **FV = $1.210,00**
- Qual a taxa equivalente em juros compostos da taxa capitalizada de forma contínua acima?